McGill

Department of Mathematics and Statistics
Département de mathématiques et de statistique

McGill University
Burnside Hall, room 1005
805 Sherbrooke St. West
Montreal, Quebec, Canada H3A 0B9

Université McGill
Burnside Hall, suite 1005
805, rue Sherbrooke Ouest
Montréal (Québec) Canada H3A 0B9

Tel/Tél : (514) 514-398-3800
Fax/Télécopieur: (514) 398-3899
www.mcgill.ca/mathstat

Warszawa, 27 sierpnia 2023

Marcin Sabok
Wydział Matematyki i Statystyki
Uniwersytet McGilla
marcin.sabok@mcgill.ca

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Karola Dudy

Rozprawa mgr. Dudy leży na styku teorii grup oraz logiki i dotyczy klasycznych zagadnień związanych z alternatywą Tarskiego oraz problemem Burnside'a. Przed omówieniem wyników rozprawy naszkicuję ogólny zarys tej tematyki. Przypomnijmy, że alternatywa Tarskiego i związany z nią problem von Neumanna wyrosły z rozważań nad paradoksem Banacha-Tarskiego i były motywowane próbą zrozumienia struktury grup nieśredniowalnych. Alternatywa Tarskiego opisuje związek nieśredniowalności grupy z istnieniem paradoksalnego rozkładu w działaniu tej grupy. Elegancki dowód alternatywy Tarskiego wykorzystuje klasyczny wynik z teorii grafów, mianowicie twierdzenie Halla o istnieniu doskonałych skojarzeń w grafach dwudzielnych. Problem von Neumanna to pytanie czy nieśredniowalność grupy jest równoważna z zawieraniem grupy wolnej F_2 jako podgrupy. W ogólności problem von Neumanna został rozwiązany negatywnie przez konstrukcje Olszanskiego tzw. potworów Tarskiego, ale wciąż trwają badania nad przypadkami kiedy odpowiedź jest twierdząca przynajmniej w pewnym uogólnionym sensie. Problem Burnside'a z kolei to jeden z najstarszych problemów w teorii grup dotyczący istnienia nieskończonych grup torsyjnych o skończonym wykładniku. Przykłady takich grup zostały skonstruowane przez Adiana i Nowikowa oraz później uproszczone przez Olszanskiego. Tematyka rozprawy mgr. Dudy dotyczy tych klasycznych zagadnień i jest związana z problemami wyrastającymi z badania rozstrzygalności w teorii grup. Najbardziej znanym takim problemem jest problem słów, który w ogólności jest nierozstrzygalny, ale dla pewnych klas grup okazuje się rozstrzygalny. Klasyczny algorytm Dehna rozstrzygający problem słów dla grup podstawowych orientowalnych powierzchni doprowadził do wyizolowania definicji grup małych skreśleń, które z kolei są używane w konstrukcji potworów Tarskiego i negatywnych rozwiązań problemu Burnside'a.

Niniejsza rozprawa jest podzielona na dwie niezależne części dotyczące powyższych tematów. Część pierwsza skupia się na problemie nieśredniowalności z punktu widzenia obliczalności. Główne wyniki tej części rozprawy dotyczą znajdowania obliczalnych obiektów, takich jak doskonałe skojarzenia w grafach dwudzielnych i rozkłady paradoksalne w działaniach grup nieśredniowalnych. Wyniki te wyrastają z klasycznych prac Kiersteada z lat 80 ubiegłego wieku. Wprawdzie dla problemów decyzyjnych w teorii grup w przypadku rozstrzygalnym większy nacisk kładzie się obecnie na klasę złożoności tych problemów (np. NP-zupełność), jednak badania nad istnieniem takich obliczalnych rozwiązań wciąż są prowadzone, np. w pracach Cavaleriego lub Moriakowa. Problem obliczalnych rozwiązań problemów niedecyzyjnych takich jak istnienie doskonałych skojarzeń w grafach jest natomiast związany z głównym nurtem badań nad istnieniem mierzalnych lub borelowskich rozwiązań tego typu problemów. Druga część rozprawy dotyczy struktury podgrup torsyjnych w grupach małych skreśleń. Ta tematyka jest obecnie centralna w geometrycznej teorii grup i podobne wyniki były niedawno dowodzone przez Norina, Przytyckiego i Osajdę oraz Haettela i Osajdę dla innych klas grup. Grupy małych skreśleń z definicji spełniają jeden z trzech warunków C(6), C(4)-T(4) lub C(3)-T(6) i dowody w drugiej części rozprawy są prowadzone osobno w każdym z tych trzech przypadków. Metody stosowane w tej części rozprawy używają nowych narzędzi wprowadzonych niedawno przez Hodę i dowody prowadzone przez doktoranta zawierają wiele nowych pomysłów nieobecnych dotychczas w literaturze.

Część pierwsza rozprawy zawiera wyniki będące obliczalnymi wersjami paru znanych twierdzeń. Pierwsze z nich to twierdzenie Halla o skojarzeniach i jego uogólniona wersja dotycząca tzw. haremów. W twierdzeniu I.1 autor dowodzi obliczalnej wersji twierdzenia Halla o haremach. W tym celu wprowadza pojęcie wysoce obliczalnego grafu oraz wysoce obliczalnego warunku Halla dla d-haremów, a następnie dowodzi, że przy założeniu tych warunków graf dopuszcza obliczalne doskonałe $(1,d)$-skojarzenie. Dowód twierdzenia I.1 jest motywowany argumentami Kiersteada zaadoptowanymi w kontekście obliczalnym. Drugie klasyczne twierdzenie to wynik Tarskiego mówiący, że działanie grupy jest nieśredniowalne wtedy i tylko wtedy gdy jest paradoksalne (czyli dopuszcza paradoksalny rozkład przez podział). W twierdzeniu I.3 doktorant podaje obliczalną wersję tego twierdzenia, mówiącą, że jeśli grupa działa przez obliczalne bijekcje na zbiorze liczb naturalnych w sposób nieśredniowalny (tj. nie spełnia warunku Følnera) to istnieje paradoksalny rozkład przez podział względem tego działania. Twierdzenie I.2 jest sformułowane w trochę ogólniejszej wersji dla pseudogrup. Dowód twierdzenia I.1 jest zastosowaniem twierdzenia Halla o haremach w kontekście obliczalnym. Oba powyższe wyniki są już opublikowane w pracy [DI22a] wspólnej z Iwanowem. Trzecie główne twierdzenie pierwszej części dotyczy twierdzenia Whyte'a i jego ugólnienia przez Schneidera. Whyte udowodnił tzw. geometryczną hipotezę von Neumanna, a dokładniej, że jeśli dyskretna przestrzeń metryczna o jednostajnie ograniczonej geometrii jest nieśredniowalna, to można ją podzielić na części będące bilipschitzowsko równoważne z 4-regularnym drzewem. Schneider uogólnił ten wynik dla zgrubnych przestrzeni jednostajnych dowodząc, że w przypadku nieśredniowalnym pewien element struktury jednostajnej jest 4-regularnym lasem. W twierdzeniu 4.6.2 doktorant uzyskuje obliczalną wersję twierdzenia Schneidera dla zgrubnych przestrzeni jednostajnych na zbiorze liczb naturalnych, gdzie przy wzmocnieniu założenia średniowalności doktorant konstruuje d-regularny las w pewnym obliczalnym elemencie struktury jednostajnej. Dowód tego twierdzenia wykorzystuje obliczalną wersję twierdzenia Halla o haremach z twierdzenia I.1.

W ramach omówienia pierwszej części rozprawy chciałbym jeszcze wspomnieć o pracy doktoranta [DI22b] wspólnej z Iwanowem, która nie znalazła się w rozprawie, ale stanowi część dorobku naukowego doktoranta i jest warta omówienia. W tej pracy autorzy rozważają następujący problem decyzyjny: dla grupy G ze skończoną prezentacją oraz skończenie wielu elementów G należy rozstrzygnąć czy podgrupa generowana przez te elementy jest średniowalna. Główny wynik [DI22b] mówi, że istnieje skończenie prezentowalna grupa G, dla której dodatkowo problem słów jest rozstrzygalny, ale powyższy problem średniowalności jest nierozstrzygalny. Sam ten wynik jest ciekawy, a jego dowód wykorzystuje w nietrywialny sposób wyniki Asha i Knight z obliczalnej teorii modeli. Nasuwa się pytanie, czy problem średniowalności może być Π^0_2-zupełny?

Główny wynik drugiej części rozprawy to fundamentalne twierdzenie II.1 mówiące, że podgrupy torsyjne grup małych skreśleń są cykliczne. Wynika ono z ogólniejszego twierdzenia dotyczącego działań grup małych skreśleń. Przypomnijmy, że działanie grupy jest lokalnie eliptyczne jeśli każdy element grupy ma punkt stały, natomiast działanie jest eliptyczne jeśli istnieje globalny punkt stały tego działania. W twierdzeniu II.2 w rozdziale 6 autor dowodzi, że jeśli G działa na jednospójnym kompleksie małych skreśleń przez automorfizmy tak, że działanie na 1-szkielecie jest wolne, to z lokalnej eliptyczności tego działania wynika jego eliptyczność. To implikuje twierdzenie II.1 mówiące, że podgrupy torsyjne grup małych skreśleń są cykliczne przez rozważenie działania podgrupy torsyjnej na kompleksie Cayleya grupy. Z torsyjności wynika lokalna eliptyczność działania, natomiast eliptyczność implikuje, że istnieje punkt stały, który musi być środkiem pewnej 2-komórki. Z wolności działania na 2-szkielecie wynika, że na tej 2-komórce podgrupa torsyjna musi działać przez obroty, co implikuje że jest cykliczna. Dowód twierdzenia II.2 jest prowadzony osobno w każdym z przypadków C(6), C(4)-T(4) i C(3)-T(6). Idee dowodu we wszystkich przypadkach są zbliżone, ale w każdym przypadku doktorant musi pokonać inne trudności. Dla przykładu omówię strategię dowodu dla kompleksów spełniających warunek C(4)-T(6). Autor zakłada nie wprost, że globalny punkt stały nie istnieje, by znaleźć element grupy, który na pewnej nieskończonej geodezyjnej działa przez przesunięcie i wobec tego nie ma punktu stałego. Zakładając, że nie ma globalnego punktu stałego autor wybiera dwa elementy grupy, które działają przez obroty na dwóch różnych 2-komórkach i konstruuje nieskończoną geodezyjną, na której iloczyn pewnych potęg tych elementów działa przez przesunięcia. W konstrukcji autor używa kwadryzacji kompleksu, techniki wprowadzonej niedawno przez Hodę, motywowanej wynikami Wise'a. Kwadryzacja kompleksu jest używana w dowodzie, że połączenie geodezyjnej łączącej środki 2-komórek i pewnego jej obrotu pozostaje geodezyjną, gdzie geodezyjność autor sprawdza używając krzywizny kombinatorycznej skwardryzowanego kompleksu. Dowód nawet w przypadku C(4)-T(4) jest zaawansowany technicznie i większość metod wprowadzonych przez doktoranta jest nowa

Podsumowując, uważam, że roprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Ponadto, ze względu na wysoki poziom drugiej części rozprawy (przy czym nie wliczam do pierwszej części wyników pracy [DI22b], które nie znalazły się w rozprawie), tj. twórczość argumentów, wagę wyniku oraz samodzielność tej pracy, wnoszę o wyróżenienie rozprawy.

Marcin Sabok

Marcin Sabok