Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Adama Malinowskiego.
Maciej Malicki

Rozprawa doktorska mgr. Adama Malinowskiego, napisana pod kierunkiem prof. Ludomira Newelskiego, dotyczy podgrup specjalnych Ellisa dla pewnej klasy potoków, rozważanych w kontekście teorii modeli. Dokładniej rzecz biorąc, Autora interesują G-algebry Boole'a $\mathcal{A}$ będące podalgebrami $\mathcal{P}(G)$ z działaniem grupy G przez przesunięcie. Dla odpowiadających im G-potoków na przestrzeni Stone'a $S(\mathcal{A})$ badane są półgrupy Ellisa $E(S(\mathcal{A}))$ oraz ich podgrupy specjalne. Okazuje się, że dla zrozumienia ich struktury kluczowe są zbiory generyczne w G, tj. zbiory, których skończona liczba przesunięć pokrywa G. W kolejnych rozdziałach pracy Autor studiuje zbiory generyczne i pokrewne im obiekty, uzyskując z ich użyciem interesujący wgląd w podgrupy specjalne dla różnych klas grup oraz algebr.

Omówienie wyników

Rozdziały 1 i 2: wstęp i wprowadzenie do tematyki badawczej rozprawy

Autor rozpoczyna od wprowadzenia w problematykę topologicznych układów dynamicznych. Definiuje podstawowe pojęcia, po czym krótko, ale w sposób klarowny, wprowadza pojęcia półgrupy Ellisa i podgrup specjalnych. Omawia także potrzebne w dalszych częściach narzędzia badawcze, w tym wcześniejsze rezultaty Newelskiego, będące koncepcyjnym punktem wyjścia rozprawy.

Rozdział 3

W tym rozdziale Autor bada zbiory silnie generyczne w algebrach $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{P}(G)$, tj. zbiory takie, że każdy niezerowy element w generowanej przez nie G-algebrze jest generyczny. Ich rola wynika choćby stąd, że algebry generyczne odpowiadają potokom minimalnym postaci $S(\mathcal{A})$. Jak Autor pokazuje w Twierdzeniu 3.12, jest to również prawdą w odniesieniu do potoków postaci 2^G.

Większa część rozdziału poświęcona jest konstrukcji nietrywialnych zbiorów silnie generycznych. W tym przypadku "nietrywialny" oznacza nieperiodyczny, gdzie zbiór $A \subseteq G$ jest periodyczny, jeśli jest sumą warstw pewnej podgrupy skończonego indeksu. Do tego celu Autor używa tzw. drzew warstw (podgrup skończonego indeksu). Pokazuje, że zbiory skonstruowane z użyciem drzew warst są domknięto-otwarte w topologii proskończonej, a zatem silnie generyczne. Z drugiej strony zbiory takie, poza trywialnymi przypadkami (patrz Lemat 3.21) nie są periodyczne. W ten sposób można łatwo konstruować nieperiodyczne zbiory silnie generyczne np. w grupie $(\mathbf{Z}, +)$. Narzędzie to jednak trywializuje się w przypadku grup proskończonych (tj. zupełnych w topologii proskończonej), dlatego też (a także ze względu na dalsze rozważania) ważny jest Przykład 3.25, w którym przedstawiona jest metoda konstrukcji zbiorów silnie generycznych i nieperiodycznych dla grup proskończonych (np. proskończych uzupełnień $(\mathbf{Z}, +)$).

Na koniec Autor bada wzmocnienie silnej generyczności, tj. zbiory jednostajnie silnie generyczne, istotne w perspektywie teoriomodelowej.

Rodział 4

W rozdziale tym, dla ustalonej grupy topologicznej G, Autor studiuje podalgebry algebry $\mathcal{SBP}(G)$ zbiorów z tzw. silną własnością Baire'a. Autor definiuje zbiory z silną własnością Baire'a jako zbiory postaci $U \Delta M$, gdzie U jest otwarty, a M nigdzie gęsty (a nie I kategorii – jak w przypadku własności Baire'a). Ta interesująca i naturalna własność zyskuje dodatkowe znaczenie w teorii modeli, gdyż spełniana jest przez zbiory zewnętrznie definiowalne w strukturach o-minimalnych z gęstym porządkiem.

W pierwszej kolejności rozważany jest przypadek, gdy G wyposażona jest w topologię proskończoną. Głównym wynikiem jest tutaj Twierdzenie 4.6, które daje opis podgrupy specjalnej dla algebr $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{SBP}(G)$. Okazuje się, że jest to granica odwrotna ilorazów G przez podgrupy normalne skończonego indeksu znajdujące się w $\mathcal{A}$.

Rozwijając techniki dowodowe zastosowane do przypadku topologii proskończonej, Autor uzyskuje też opis podgrupy specjalnej dla algebr $\mathcal{A} \leqslant \mathcal{SBP}(G)$, gdy G jest grupą zwartą. Twierdzenie 4.18 mówi, że w tym przypadku ma ona postać $G/\sim$, gdzie $\sim$ jest relacją równoważności na G utożsamiającą elementy, których nie można rozdzielić z użyciem zbiorów regularnie otwartych U takich, że $U \Delta Ag$ jest nigdzie gęsty dla pewnego $A \in \mathcal{A}$ i $g \in G$. Warto zauważyć, że relacja $\sim$ może być trywialna – jest tak na przykład, gdy $\mathcal{A} = \mathcal{SPB}(G)$ – a wtedy podgrupa specjalna jest izomorficzna z G.

Spora część rozważań z Rozdziałów 3 i 4 zostaje w elegancki sposób wykorzystana do pokazania w Twierdzeniu 4.25, że w każdej grupie zwartej istnieje zbiór z silną własnością Baire'a, który jest silnie generyczny, lecz nie jednostajnie silnie generyczny (a zatem również nieperiodyczny).

Następnie ustalone zostaje w Twierdzeniu 4.29, że we wcześniejszych wynikach istotna jest jedynie całkowita ograniczoność grupy, a nie sama jej zwartość. Fakt ten znajduje zastosowanie do wyprowadzenia pewnych związków pomiędzy podgrupami specjalnymi Ellisa w sytuacji, gdy grupy G definiowalne są w różnych rozszerzeniach elementarnych struktur o-minimalnych. Przyznam, że ta część (tj. podrozdział 4.3.1) wydała mi się najgorzej napisana. Główne założenia (np. zwartość G^N) i wyniki nie są w żaden sposób wyodrębnione, używana jest notacja nie zdefiniowana wcześniej (np. $S_{ext,G}(M)$), z tekstu nie wynika też, jaka jest właściwie motywacja dla tych rozważań i dlaczego przedstawione rezultaty mają być interesujące.

Na koniec bardziej szczegółowo badane są pewne przeszkody w uogólnieniu uzyskanych wyników dla grup zwartych do szerszych klas grup topologicznych.

Podsumowanie

Rozprawę doktorską mgr. Adama Malinowskiego oceniam wysoko. W sposób klarowny i świadczący o dogłębnym zrozumieniu tematu przez Autora, prezentuje rezultaty spójnego i całościowego projektu badawczego. Wyniki są ogólne i interesujące, a motywacja dla nich zrozumiała również dla czytelników nie zajmujących się na co dzień tą problematyką (do których ja się zaliczam). Dowody często są dalece nietrywialne, a ich prezentacja jest jednocześnie precyzyjna, jak i przejrzysta, tak że nie ma problemu z prześledzeniem głównych linii rozumowania.

Jeśli miałbym sformułować jakieś zarzuty, to – pomijając drobne kwestie notacyjne i definicyjne, których nie będę tu omawiał – dotyczyłyby one bardzo zdawkowego potraktowania teoriomodelowego aspektu tych badań. Brakuje jakiegokolwiek wprowadzenia, choć omówione są podstawowe pojęcia topologiczne i dynamiczne (potok, minimalność, przestrzeń Stone'a, półgrupa Ellisa, itd.) Nawet jeśli Autor uznał, że nawet skrótowe omówienie pojęć takich jak definiowalność, czy o-minimalność, byłoby z jakichś względów trudne do wykonania, to czytelnik powinien przynajmniej dowiedzieć się, dlaczego są one istotne i warto je zgłębiać. Szczególnie, że niektóre wyniki, w których się pojawiają, zaliczane są we wstępie do najważniejszych osiągnięć tego projektu doktorskiego.

Mankamenty te nie zmieniają mojej bardzo pozytywnej oceny rozprawy, która bez wątpienia spełnia wymogi niezbędne do ubiegania się o stopień doktora nauk matematycznych. Dodam, że choć przedstawione w niej rezultaty nie zostały jeszcze opublikowane, Adam Malinowski jest współautorem jednego opublikowanego artykułu i jednego preprintu. Wnioskuję zatem o dopuszczenie mgr. Adama Malinowskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.