

Dr hab. Michał Oszmaniec

Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

Ocena rozprawy doktorskiej mgr. Piotra Kopszaka pt.

„Multi port-based teleportation – a group theoretic approach”

Rozprawa doktorska Pana mgr. Piotra Kopszaka poświęcona jest badaniu teleportacji wielocząstkowych stanów kwantowych w schematach teleportacji opartych o protokół tak zwanej „Portowej teleportacji kwantowej” (ang. *Port-based teleportation - PBT*) oraz jego uogólnienia. Schematy te różnią się od standardowych metod teleportacji tym, że strona, do której teleportuje się stan kwantowy (typowo określaną jako Bob) nie musi dokonywać żadnej dodatkowej operacji po otrzymaniu informacji o wyniku pomiaru dokonanego przez stronę wysyłającą informację (Alicję). Z jednej strony konsekwencją takiego podejścia jest pogorszenie jakości z jaką przesyłana jest informacja – wierność teleportowanego stanu pogarsza się, lub protokół przestaje mieć charakter deterministyczny (teleportacja odbywa się z sukcesem tylko z pewnym prawdopodobieństwem ściśle mniejszym niż 1). Z drugiej, brak konieczności dokonywania adaptowanej operacji po stronie odbierającej informację kwantową pozwala wykorzystać ten schemat do różnych ciekawych zastosowań takich jak *position based quantum cryptography* czy *instantaneous nonlocal quantum computation*.

W standardowych podejściach schematy portowej teleportacji kwantowej używane są aby teleportować stan jednego układu kwantowego (w ogólności opisanego przez d wymiarową przestrzeń Hilberta) poprzez (i) wykonanie przez Alicję kolektywnego pomiaru na rozważanym układzie oraz części wielocząstkowego splątanego stanu kwantowego dzielonego przez nią i Boba, (ii) przekazanie wyniku pomiaru Bobowi oraz w końcu (iii) użyciu przez Boba cząstki (portu) wskazanej przez wynik pomiaru Alicji jako rejestru na którym (w danej realizacji eksperymentu) będzie się znajdować teleportowany stan kwantowy. Tematem przewodnim recenzowanej rozprawy doktorskiej jest badanie uogólnień tego schematu na przypadek, kiedy teleportowany jest nie pojedynczy układ kwantowy, ale ogólny wielocząstkowy stan kwantowy. W szczególności w pracy rozważane i analizowane są dwa możliwe uogólnienia PBT na przypadek wielocząstkowy (i) tak zwana wielocząstkowa teleportacja portowa (ang. *Multi Port-Based Teleportation - MPBT*), w której wynik pomiaru postronnie Alicji wskazuje Bobowi na (uporządkowany) podzbiór portów na których znajdować się będzie teleportowany do niego stan, oraz (ii) sekwencyjny schemat w którym ten sam wielocząstkowy stan kwantowy (dzielony początkowo między Alicję i Boba) jest używany aby wykonać kolejno standardowy protokół PBT na cząstkach na których znajduje się stan, który chcemy teleportować. Od strony technicznej autor wykorzystuje w dużym stopniu symetrię problemu – tj. to że, przy odpowiednich sformułowaniach, jakość protokołów MPBT oraz wariantu sekwencyjnego PBT można wyrazić i analizować poprzez obiekty mające wysokie symetrie (związane ze znaną dualnością Shura-Weyla wiążącą reprezentacje

grupy symetrycznej S_n i $U(d)$ na przestrzeni $(\mathbb{C}^d)^{\otimes n}$).

Rozprawa doktorska jest dość obszerna – składa się na nią około 140 stron głównego tekstu, i ponad 10 stron technicznych dodatków. Całość napisana jest w języku angielskim co niewątpliwie jest jej atutem pracy gdyż zwiększa liczbę jej potencjalnych odbiorców. Główny tekst podzielony jest na siedem rozdziałów. Po pierwszym, stanowiącym krótki wstęp to tematyki informacji kwantowej, następują trzy stanowią wprowadzenie teoretyczne i poświęcone są kolejno: podstawowym pojęciom

i notacji używanych w kwantowej teorii informacji (Rozdział 2), teorii reprezentacji grup skończonych (Rozdział 3), oraz szczegółowej dyskusji bardziej złożonych zagadnień z teorii reprezentacji grupy symetrycznej (Rozdział 4). Kolejne trzy rozdziały stanowią prezentację wyników uzyskanych przez autora i współpracowników. Rozdział 5 poświęcony jest szczegółowemu omówieniu i analizie struktury komutanta (tj. algebry składającej się operacji komutujących z danym zbiorem operatorów) map postaci $U^{\otimes n-k} \otimes \bar{U}^{\otimes k}$, gdzie U jest dowolna macierzą unitarną działającą na pojedynczym d wymiarowym układzie, a \bar{U} oznacza sprzężenie zespolone. Rozdział 6 zawiera szczegółową analizę rodziny protokołów MPBT w wariantach deterministycznym, probabilistycznym, oraz ich zoptymalizowanych wersjach. W końcu, Rozdział 7 zawiera wyniki dotyczące ponownego wykorzystania (*ang. recyclingu*) wielocząstkowych splątanych stanów kwantowych jako zasobu do przeprowadzania sekwencyjnych protokołów PBP w celu dokonania teleportacji wielocząstkowego stanu kwantowego.

Najważniejsze wyniki

Wyniki uzyskane w rozprawie są w większości ciekawe i nowatorskie oraz wpisują się w aktualny w teorii kwantowej informacji nurt badań nad uogólnieniami standardowego schematu teleportacji, wykorzystując przy tym ciekawe narzędzia matematyczne. Do najżyźniejszych wyników pracy zaliczam:

1. Zbadanie Struktury komutanta $U^{\otimes n-k} \otimes \bar{U}^{\otimes k}$, w szczególności znalezienie ortonormalnej bazy operatorów tej algebry (Twierdzenie 18).
2. Podanie analitycznego ograniczenia dolnego na wierność teleportacji w przypadku standardowego schematu MPBT, w sytuacji kiedy stanem dzielonym przez Alicję i Boba jest wiele kopii (w ilości odpowiadającej ilości portów) stanu maksymalnie splatanego (Twierdzenie 22).
3. Kompleksowa analiza i wyznaczenie analitycznie miar jakości teleportacji standardowych i zoptymalizowanych (względem stanów kwantowych współdzielonych przez Alicję i Boba) schematów teleportacji MPBT, zarówno w przypadku deterministycznym jak i probabilistycznym: Twierdzenia 25, 27 (procedura deterministyczna dla której miara jakości teleportacji jest tak zwana wierność splątania) oraz Twierdzenia 28, 29 (procedura probabilistyczna, w której jakość teleportacji kwantyfikuje się poprzez średnie prawdopodobieństwo sukcesu protokołu).
4. Wyprowadzenie zamkniętych wzorów na wierność z którą w scenariuszu deterministycznym po jednej rundzie sekwencyjnego protokołu PBT (zastosowanego do wielocząstkowego stanu kwantowego) odtwarzany jest idealny stan współdzielony w idealnym scenariuszu (ale na układzie o zmniejszonej o 1 liczbie portów) przez Alicję i Boba. Analityczne wyniki dotyczą zarówno przypadku standardowego protokołu PBT, w którym Alicja i Bob współdzielą wielocząstkowy stan splatany (Twierdzenie 34), jak i przypadku kiedy współdzielony stan jest optymalizowany (Twierdzenie 35).

Powyżej wymienione rezultaty w mojej ocenie w zupełności wystarczają na solidną rozprawę doktorską. W szczególności z tego punktu widzenia bardzo ciekawa jest dyskusja przeprowadzona pod koniec Rozdziału 6. Wynika z niej, że wiele schematów zaproponowanych w rozprawie będzie sprawdzało się znacznie lepiej od „standardowego” schematu „*Packaged PBT*” do teleportacji wielocząstkowych stanów kwantowych. Wyniki rozprawy oparte są o cztery opublikowane artykuły, w których Piotr Kopszak miał istotny wkład.

Uwagi krytyczne

Niestety, sama praca przygotowana jest w sposób bardzo niestaranny, zarówno pod względem redakcyjnym jak i samej prezentacji. Znacznie utrudnia to docenienie uzyskanych wyników oraz kompletne zrozumienie dowodów uzyskanych w pracy twierdzeń. Poniżej przedstawiłem wybrane niedociągnięcia, dzieląc je na kategorie.

Uchybienia edytorskie

Praca naszpikowana jest licznymi literówkami i niespójnościami notacyjnymi. Poniżej wymienię kilka, przykładów, nie siląc się na kompletność ani systematyczność. Chciałbym jednak podkreślić że z podobnym natężeniem pomyłek mamy (niestety) do czynienia przez całą zawartość rozprawy, nie tylko w częściach wstępnych.

- Ostatnie przejście we wzorze 2.9 jest niepoprawne.
- Wierność splatania we wzorze 2.13 powinna być definiowana dla znormalizowanego stanu maksymalnie splatanego. W konsekwencji, przy podanej definicji, wzór 2.15 przestaje być poprawny; Ponadto wzór 2.14 zawiera oczywista literówkę.
- Literówka we wzorze 2.16.
- Literówka w sformułowaniu Twierdzenia 1.
- Literówka we wzorze 2.16 (brak znaku równości).
- Literówka w pierwszym wyrażeniu we wzorze 2.40
- Operator Omega pojawiający się we wzorze 2.56 nie został zdefiniowany
- Niepoprawny czynnik 2 we wzorze 2.66
- Notacja \hat{G} użyta w Corollary 1 nie została zdefiniowana
- Literówka (literówki?) we wzorze 3.10

Ponadto, w mojej ocenie praca zawiera zbyt mało odniesień do literatury, w szczególności związanej z praktycznymi zastosowaniami PBT. Co więcej w niektórych miejscach brak do konkretnych odniesień w literaturze znacząco utrudnia zrozumienie wywodów autora (tak jest na przykład przy wyprowadzaniu dolnego ograniczenia na wierność teleportacji w Twierdzeniu 22 oraz przy dyskusji bardziej zaawansowanych faktów z teorii reprezentacji algebr pojawiających się z rozdziale 5).

Prezentacja wyników i treści

Od strony prezentacji wyników, praca napisana jest bardzo nieprzystępnie. Po krótkim i dość suchym wstępie teoretycznym autor bardzo szybko przechodzi do stricte technicznych części rozprawy, skupiając się bardziej na wzorach i strukturach matematycznych potrzebnych do uzyskania wyników, niż na warstwie koncepcyjnej i pojęciowej. We wstępie pracy zabrakło mi dyskusji i znaczenia protokołów teleportacji (zarówno standardowej oraz PBT). Z kolei prezentacja samych wyników pracy ograniczała się zwykle to podania (z zasady skomplikowanych) formuł matematycznych na odpowiednie wielkości kwantyfikujące jakość danego wariantu procedury teleportacji. Jestem zdania, że co najmniej w dwóch przypadkach takie podejście zaprzepaściło możliwość ciekawego rozszerzenia/interpretacji uzyskanych wyników (szczegółowe komentarze na ten temat zawarłem w ostatniej części recenzji).

Chciałbym też zwrócić uwagę na bardzo nieprzyjazny dla czytelnika sposób wyjaśniania i dowodzenia technicznych wyników pracy. Ze względu na duży poziom skomplikowania i wyrafinowanie narzędzi matematycznych używanych przy uzyskiwaniu niektórych wyników, bardzo przydane byłoby graficzne lub schematyczne wprowadzenie do najważniejszych faktów i twierdzeń dotyczących algebry częściowo transponowanych operatorów. W chwili obecnej naprawdę istotne i nietrywialne wyniki otrzymane w tym zakresie mieszają się z trywialnymi bądź relatywnie oczywistymi stwierdzeniami dotyczącymi ogólnych algebry i komutantów działań reprezentacji (np. stwierdzenie faktu że rozważana algebra jest C^* -algebrą).

Nie mogę też nie odnieść się do kompletnie nieczytelnej, bizantyjskiej wręcz, notacji związana z rozważaniami teorio-grupowymi. Jeśli dołożyć do tego liczne pomyłki notacyjne i edytorskie, powoduje to, że bardziej techniczne fragmenty rozprawy w rozdziałach 5, 6 oraz 7 są praktycznie niezrozumiałe dla nawet uważnego czytelnika wytrenowanego w technikach teorio-grupowych oraz kwantowej teorii pomiarów. W przeszłości spotkałem się z opinia specjalistów z dziedziny (pracujących poza Polską), że prace autora oraz jego współpracowników należą do jednych z najtrudniejszych do zrozumienia w dziedzinie kwantowej informacji. Moim zdaniem wina może leżeć w dużej mierze po stronie używanej notacji. Jako przykład dobrej praktyki, tj. tego jak można przedstawiać skomplikowane treści związane ze strukturami grupowymi w kwantowej informacji, chciałbym zasugerować Autorowi następujące pozycje: Goldman Wallach, „Symmetry, Representations and Invariants”, A. Trautmann “Grupy oraz ich reprezentacje”, M. Walter, Notatki do wykładu „Symmetry and Quantum Information”, czy w końcu notatkę Arama Harrowa “Church of symmetric subspace”.

Ostatnim uchybieniem jest bardzo powierzchowne potraktowanie kwestii programowania półokreślonego (*ang. semidefinite programming*). Jest to jedno z głównych narzędzi używanych przy dowodzeniu Twierdzeń w Rozdziale 6. Niestety, wyniki uzyskane za pomocą tej techniki pojawiają się niczym „królik z kapelusza” bez żadnego głębszego uzasadnienia. Dla czytelnika nie obytego z technikami dualności dla tej klasy optymalizacyjnych problemów wypukłych przejścia mogą wydawać się nieuzasadnione.

Pytania do treści rozprawy

Po zapoznaniu się z rozprawą oraz jej z jej głównymi wynikami nasunęły mi się dodatkowe pytania i uwagi.

- Skąd bierze się dolne ograniczenie na ilość dopuszczalnych portów w założeniach Twierdzenia 22. Czy jest to artefakt techniki dowodowej, czy też Dlaczego mamy ograniczenie na liczbę portów w twierdzeniu?

- Nie jest dla mnie kompletnie jasne jakie jest praktyczne znaczenie wielu z wyników analitycznych uzyskanych w Rozdziale 6 oraz 7. Mam tu na myśli w szczególności Twierdzenia, w których interesujące kwantyfikatory jakości teleportacji zostały wyliczone w terminach skomplikowanych formuł w których pojawiają się obiekty związane z teoria reprezentacji grupy symetrycznej bądź algebry częściowo transponowanych operatorów permutacji. Rozumiem, że takie zamknięte formuły pozwalają wyliczyć odpowiednie wierności i prawdopodobieństwa wprost dla większych układów. Czy można ich jednak użyć, aby uzyskać nowe jakościowe ograniczenia na jakość protokołów teleportacji rozważanych przez autora?

- Dlaczego nie porównano procedury iteracyjnej z rozdziału 7 (dla schematu deterministycznego) ze schematem Packaged PBT oraz MBPT? Wydaje się, że z ograniczeń na wierność stanu dzielonego przez Alicję i Boba po i -tej rundzie protokołu można wyprowadzić ograniczenie dolne na wierność splatania dla całego sekwencyjnego sekwencyjnego.

- Wydaje się, że z wyniku zoptymalizowanego probabilistycznego MPBT (na który podano prosty wzór analityczny) można by wyprowadzić ograniczenie dolne niezoptymalizowanego schematu MPBT. Czy autor próbował dokonać tego go przejścia a jeśli tak, to jaki jest ostateczny wynik zastosowania takiego rozumowania?

- W przypadku sekwencyjnych protokołów PBT używanych do teleportacji wielocząstkowych stanów kwantowych, naturalne wydaje się stosowanie lokalnej unitarnej korekcji współdzielonego stanu po wykonaniu danej rundy protokołu. Czy autor rozważał taką możliwość? Jakie byłyby techniczne trudności gdyby chciał zastosować taką strategię?

Podsumowanie

Mimo uchybień i usterek w samej rozprawie, zaprezentowane w niej wyniki oceniam jako ważny i wartościowy wkład w zrozumienie uogólnionych schematów teleportacji opartych na idei PBT w przypadku wielocząstkowym. Podsumowując, stwierdzam że praca doktorska pana mag. Piotra Kopszaka pt „Multi port-based teleportation – a group theoretic approach” spełnia wymagania formalne stawione tego typu rozprawom. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Michał Oszumaniec

Warszawa 8.08.2023