

dr hab. Marcin Marciniak, prof. UG  
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki  
Uniwersytet Gdański

## **Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Piotra Kopszaka pt. „Multi port-based teleportation – a group theoretic approach”**

Rozprawa doktorska mgr. Piotra Kopszaka liczy 167 stron, składa się z siedmiu rozdziałów, appendiksu oraz bibliografii zawierającej 32 pozycje. Została napisana pod kierunkiem promotorów dr. hab. Marka Mozrzymsa, profesora Uniwersytetu Wrocławskiego oraz dr. Michała Studzińskiego.

Tematem przewodnim pracy jest opis wieloportowych protokołów teleportacji kwantowej służących do teleportacji stanów złożonych. Głównym narzędziem jest tutaj dualność Schura-Weyla i wynikające z niej wzajemne relacje reprezentacji grupy unitarnej i grupy permutacji działających na  $N$ -krotnej potędze tensorowej skończonej wymiarowej zespolonej przestrzeni Hilberta. Szczegółowa analiza własności tej struktury pozwoliła na opisanie bazy w ideale algebry częściowo transponowanych operatorów permutacji generowanym przez operatory odpowiadające pewnym specyficznym cyklom.

Wspomniane wyżej technikalnia służą autorowi do analizy różnych wariantów teleportacji: deterministycznego i probabilistycznego. W końcowym efekcie uzyskuje on wielkości charakteryzujące jakość teleportacji: wierność splątania w modelu deterministycznym i prawdopodobieństwo sukcesu w modelu probabilistycznym.

Rozdział 1 rozprawy stanowi krótkie wprowadzenie, w którym autor naświetla historię idei kwantowej teleportacji. Kolejne trzy rozdziały stanowią przegląd treści, z których będzie autor korzystał w dalszej części rozprawy. Pierwszy z nich jest zatytułowany "Struktura teorii kwantowej". Jest to bardzo pobieżna prezentacja pojęcia stanu, stanu splątanego, kanału kwantowego, a także podstawowych założeń dotyczących teleportacji kwantowej. Kolejny rozdział jest omówieniem podstawowych pojęć dotyczących grup i ich reprezentacji. Ostatni z wprowadzających rozdziałów dotyczy grupy permutacji i jej reprezentacji. W rozdziale tym pojawiają się ważne dla dalszej części pracy obliczenia śladów częściowych dla różnych operatorów występujących w reprezentacji tensorowej grupy permutacji, w szczególności dla projektorów Younga rzutujących na podprzestrzenie nieprzywiedlnych podreprezentacji.

Rozdział 5 zawiera analizę podstawowego obiektu służącego później do opisu modelu teleportacji, a mianowicie algebry częściowo transponowanych operatorów permutacji, tzn. działających na  $n$ -krotnym produkcie tensorowym i transponowanych na ostatnich  $k$ -czynnikach tensorowych. W Twierdzeniu 16 opisana jest struktura mnożenia generatorów. Okazuje się, że struktura algebraiczna znacznie różni się od algebry zwykłych operatorów permutacji. Do najważniejszych wyników tego rozdziału zaliczam Twierdzenia 18 i 19. W tym ostatnim opisana jest baza ideału  $\mathcal{M}^{(k)}$  komutującego z reprezentacją diagonalną  $\mathcal{U}^{\otimes(n-k)} \otimes \bar{\mathcal{U}}^{\otimes k}$ , gdzie  $\bar{\mathcal{U}}$  oznacza sprzężenie zespolone.

W Rozdziale 6 zawarte są główne wyniki pracy dotyczące analizy protokołów multiportowej teleportacji kwantowej. Systematyczna analiza symetrii, którym podlega opisany model prowadzi do obserwacji zawartej w Twierdzeniu 23, pozwalającej wyrazić współczynniki macierzowe kluczowego

operatora opisanego w formule (6.56) w bazie ideału  $\mathcal{M}^{(k)}$ , gdzie  $k$  jest liczbą teleportowanych cząstek. W Twierdzeniu 25 podana jest formuła na *entanglement fidelity* deterministycznej wersji protokołu. Twierdzenie 27 podaje optymalny pomiar do zmaksymalizowania *entanglement fidelity*. Otrzymane formuły wyrażają się poprzez wielkości związane z nieprzywiedlnymi reprezentacjami grupy permutacji takimi jak wymiary, czy krotności. W dalszym ciągu podobny program realizowany jest dla probabilistycznej wersji modelu teleportacji. Efekty opisane są w Twierdzeniu 29.

Otrzymane wyniki pozwalają porównać w Sekcji 6.2.6 model wieloportowej teleportacji z teleportacją jednoportową, pokazując niewątpliwą przewagę tego pierwszego. Ciekawa jest również asymptotyczna analiza sytuacji, gdy liczba teleportowanych cząstek  $k$  dąży do nieskończoności.

Ostatni rozdział 7 poświęcony jest analizie sytuacji, w której następują kolejne teleportacje przy użyciu tych samych zasobów. Zbadany został m.in. poziom degradacji tych zasobów w wyniku wielokrotnego użycia zarówno dla wersji deterministycznej, jak i probabilistycznej.

Od strony merytorycznej rozprawa pana mgr. Kopszaka reprezentuje bardzo wysoki poziom naukowy. Rozważane jest tu ważne zagadnienie będące w głównym nurcie badań naukowców zajmujących się teorią komunikacji kwantowej. Postawiony problem jest analizowany w bardzo systematyczny i konsekwentny sposób. Osiągnięcie założonych celów możliwe było dzięki dogłębnemu wniknięciu w teorię reprezentacji grup. Autor biegle posługuje się językiem diagramów Younga i wykazuje niesamowitą sprawność rachunkową. Opis nowej struktury algebraczej, jaką jest algebra częściowo transponowanych operatorów permutacji i jej reprezentacji jest też wartością samą w sobie. Element ten z powodzeniem mógłby stanowić treść rozprawy doktorskiej z matematyki.

Niestety, rozprawa ma również pewne mankamenty. Głównym jest strona edytorska pracy. Wydaje mi się, że autor nie zrobił końcowej korekty. Masa błędów literowych, niezręczności stylistycznych czasami bardzo utrudnia czytanie i nadążanie za tokiem rozumowania. W niektórych miejscach układ treści był mocno nieprzemyślany, jak choćby w końcowej części Rozdziału 3, gdzie najpierw pojawia się twierdzenie mówiące, że każda skończenie wymiarowa  $C^*$ -algebra jest półprosta, potem pojawia się definicja algebry półprostej jako sumy prostej algebr macierzowych, a na końcu definicja algebry macierzowej.

Nie jest poprawna, a w każdym razie mocno niepełna definicja  $C^*$ -algebry (Definicja 8). Podobnie argumentacja prowadząca do Proposition 5 jest niepoprawna, co nie oznacza, że teza jest nieprawdziwa.

Kuriozalna według mnie jest notacja użyta do oznaczenia faktu, że diagram Younga  $\mu$  może być otrzymany z diagramu  $\alpha$  przez dodanie kilku boksów. Autor oznacza to na stronie 33 używając symbolu  $\in$  należenia, którego użycie w tym kontekście jest wybitnie nieintuicyjne, pisząc  $\mu \in \alpha$ . Zauważmy, że jest to relacja częściowego porządku, nie jest więc obojętne, w którą stronę symbol ten jest skierowany. Sytuacja komplikuje się już w następnym zdaniu, w którym dowiadujemy się, że zapis  $\alpha \in \mu$  nie oznacza, że diagram  $\alpha$  może być otrzymany z diagramu  $\mu$  przez dodanie do niego  $k$  boksów, ale wręcz przeciwnie, teraz oznacza to, że  $\alpha$  otrzymujemy z  $\mu$  przez usunięcie  $k$  boksów. Dochodzimy zatem do kuriozalnej konkluzji, że  $\mu \in \alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha \in \mu$ . Opisana tu konwencja została zapożyczona z prac, na podstawie których powstała rozprawa. Uważam, że autor na potrzeby rozprawy mógł podejść do niej bardziej krytycznie.

Powyższe wytyki nie dotyczą zawartości merytorycznej pracy. Mimo tych niedostatków, praca reprezentuje wysoki poziom naukowy. Biorąc pod uwagę opisany we wprowadzeniu wkład pana mgr.

Kopszaka w powstanie i opracowanie opisanych wyników, z pełnym przekonaniem stwierdzam, że jest on autorem oryginalnego rozwiązania problemu naukowego oraz wykazał się wiedzą teoretyczną w dyscyplinie nauki fizyczne. Potrafi też samodzielnie prowadzić badania naukowe. Uważam, że przedłożona rozprawa spełnia wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Dlatego wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Piotra Kopszaka do dalszych etapów procedury nadania stopnia naukowego doktora w dyscyplinie nauki fizyczne.