UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
prof. dr hab. Agnieszka Świerczewska-Gwiazda

Warszawa, 10 maja 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej ”Rozwiązania stacjonarne w nielokalnych lub zdegenerowanych modelach z biologii matematycznej” mgra Szymona Cygana

Rozprawa doktorska mgra Szymona Cygana została napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Grzegorza Karcha na Uniwersytecie Wrocławskim. Składa się ona z wyraźnych dwóch części, obie jednak łączy biologiczna motywacja rozpatrywanych modeli. Pierwszemu zagadnieniu - równaniu z członem nielokalnym poświęcony jest rozdział drugi rozprawy. Natomiast rozdziały 3 - 6 dotyczą układu równań reakcji - dyfuzji.

Pierwsza część doktoratu oparta jest na samodzielnej pracy

- S. Cygan, Pattern formation in a non local Kondo model, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021.

Badane są (niestałe) rozwiązania stacjonarne równania

$$u_t = -au + f(Tu) \tag{1}$$

uzupełnionego warunkiem początkowym, gdzie T jest nielokalnym operatorem całkowym. Funkcja f spełnia warunek Lipschitza, dzięki czemu istnienie rozwiązań tego zagadnienia wynika z twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Jak się dalej przekonujemy funkcja f jest de facto obcięciem. Dla dalszych kroków oczywiście kluczowe są własności operatora T, m.in to, że $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$Tu(x) = \int_\Omega K(x-y)u(y)\mathrm{d}y \tag{2}$$

jest operatorem symetrycznym i zwartym. Zostały przedstawione dwa dowody istnienia rozwiązań stacjonarnych dla tego równania. Pierwsza metoda opiera się na twierdzeniu bifurkacyjnym Rabinowitza. Drugi dowód to zastosowanie twierdzenia

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl

Schaudera o punkcie stałym. Należy nadmienić, że rozpatrywane są tutaj różne przypadki w zależności od znaku jądra K (nieujemne, niedodatnie i zmieniające znak).

Rezultaty analityczne i różnorodność rozpatrywanych przypadków zostały zilustrowane znalezionymi rozwiązaniami numerycznymi. Symulacje zostały zrobione w przypadku jednowymiarowym i dwuwymiarowym.

Druga część pracy dotyczy układu równań łączącego w sobie równanie różniczkowe cząstkowe reakcji-dyfuzji z równaniem różniczkowym zwyczajnym. Tego typu układy były niejednokrotnie badane w przeszłości z bardzo konkretnie dobranymi funkcjami w modelu, co pozwalało na wykorzystanie ich struktury. Tutaj jednak rozpatrywane są bardzo ogólne funkcje, dzięki czemu wyniki dla przedstawionego zagadnienia pozwalają na rozwikłanie problemu stabilności rozwiązań stacjonarnych dla wielu modeli. Przywołam rozpatrywany układ

$$\begin{aligned} u_t &= f(u,v) \\ v_t &= \gamma\Delta v + g(u,v), \end{aligned} \tag{3}$$

który uzupełniony jest warunkiem brzegowym typu Neumanna i warunkiem początkowym.

Analiza problemu zapoczątkowana jest dowodem istnienia lokalnych w czasie rozwiązań. Jako rozwiązania tego układu rozumiemy rozwiązania całkowe (tzw. *mild solutions*). Te rozwiązania są jednoznaczne. Dalsza uwaga skierowana jest w stronę rozwiązań stacjonarnych i zagadnieniu ich stabilności. Rozwiązania stacjonarne są słabym rozwiązaniami (według Definicji 3.1.2) problemu niezależnego od czasu. Pan Szymon identyfikuje dwa rodzaje rozwiązań stacjonarnych - rozwiązania regularne oraz posiadające nieciągłość skokową. W pierwszym przypadku rozwiązania stacjonarne zostały skonstruwoane przy wykorzystaniu teorii bifurkacji i dalej wykazane zostało, że są one niestabilne. Ciekawą obserwacją jest, że ta niestabilność nie zależy od struktury członu nieliniowego. Rezultaty te znajdują się w czwartym rozdziale rozprawy.

Analiza stabilności rozwiązań oparta jest na procedurze linearyzacji układu. Dlatego też w rozdziale trzecim odnajdujemy część poświęconą problemowi liniowemu. Jest to dość standardowe użycie metod analizy spektralnej, aczkolwiek bardzo starannie przedstawione z dbałością o wszystkie szczegóły analityczne.

W następnym rozdziale zgromadzone zostały wyniki dotyczące rozwiązań posiada-

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl

jących skokową nieciągłość. Skonstruowane rozwiązania mają pewną specyficzną strukturę - są mianowicie skoncentrowane w otoczeniu stanów stałych na zbiorach dużej miary ze skokiem na zbiorach małej miary. Dla tych rozwiązań udowodniona została liniowa i nieliniowa stabilność (stabilność rozwiązania zerowego układu nieliniowego). W tym celu wykazane zostało, że nieliniowa stabilność, przy dodatkowych założeniach, wynika z liniowej stabilności.

Bardzo wartościowy jest rozdział szósty, który poświęcony jest przykładom i ilustracjom numerycznym. Zawsze cenię sytuację, w której równolegle do abstrakcyjnych rozumowań, tak jak w tym przypadku równania sformułowane są dość ogólnie, autor jednak zada sobie trud, aby przekonać czytelnika, że zaprezentowana teoria odnosi się do wielu konkretnych modeli. Pan Szymon Cygan pokazał jak przy użyciu twierdzeń z rozprawy można wykazać np. niestabilność rozwiązań regularnych dla modelu Gray'a-Scotta. W tym przypadku omawiane są też niestabilne rozwiązania nieciągłe. W dalszej części rozdziału pojawia się wiele innych przykładów.

Wyniki przedstawione w rozprawie są ciekawe i niewątpliwie istotnie rozszerzają stan wiedzy w dziedzinie, która obecnie aktywnie się rozwija. Rozprawa jest na bardzo wysokim poziomie matematycznym, różnorodność stosowanych technik wykazuje szeroką wiedzę i kulturę matematyczną Pana Szymona Cygana.

Pan Cygan jest autorem jednego opublikowanego samodzielnego artykułu w czasopiśmie Mathematical Methods in the Applied Sciences. Ponadto jest współautorem jednego artykułu przyjętego do publikacji w Journal of Evolution Equations oraz dwóch artykułów dostępnych jako preprinty na arXiv, przy czym wszystkie te wspomniane prace powstały w międzynarodowym zespole. Wysoko oceniam tak dużą aktywność naukową.

Konkluzja. Uważam, że rozprawa jest bardzo ciekawa, zawiera nowe rezultaty i reprezentuje zaawansowany poziom matematyczny, dlatego też wnioskuję o dopuszczenie mgra Szymona Cygana do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Ponadto z pełnym przekonaniem wnioskuję o wyróżnienie rozprawy doktorskiej z uwagi na istotny wpływ uzyskanych wyników na rozwój badań w kierunku stabilności rozwiązań nieliniowych układów równań różniczkowych cząstkowych.

Z poważaniem

Agnieszka Świerczewska-Gwiazda

ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa, Polska
+48 22 55 44 115
e-mail: aswiercz@mimuw.edu.pl