Recenzja osiągnięcia habilitacyjnego
'Nieprzemienna probabilistyka: fenomen skracania, twierdzenie graniczne, oraz deformacje typu B'
przedstawionego przez dr Wiktora Ejsmonta we wniosku złożonym na Uniwersytecie Wrocławskim

Osiągnięcie naukowe dr Wiktora Ejsmonta stanowiące podstawę wniosku habilitacyjnego składa się z sześciu prac opublikowanych w latach 2015-2021 (jednej samodzielnej, pięciu współautorskich z Natashą Blitvic, Markiem Bożejką, Takehiro Hasebe oraz Franzem Lehnerem – zgodnie z oświadczeniami współautorów wkład habilitanta w powstanie wspólnych prac był znaczący). Wszystkie omawiane prace wykorzystują język i techniki wolnego prawdopodobieństwa, w szczególności zaawansowaną kombinatoryczną analizę rozmaitych klas partycji.

Podstawowy wkład habilitanta w dziedzinę polega w mojej opinii na gruntownym zbadaniu rozkładów nieprzemiennych zmiennych losowych powstających jako wielomiany drugiego stopnia (czy węże], formy kwadratowe) i przeanalizowaniu konsekwencji otrzymanych własności takich rozkładów. Ogólny kontekst prowadzonych badań wiąże się z pojęciem nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej, rozumianej tu jako *-algebra z jedynką, A, wyposażona w nieujemny znormalizowany funkcjonał śladowy $\tau : A \to \mathbb{C}$ ($\tau(X^*X) \geqslant 0, \tau(1) = 1, \tau(XY) = \tau(YX), X, Y \in A$). Samosprzężone elementy algebry A nazywamy (nieprzemiennymi) zmiennymi losowymi, zaś przez rozkład X rozumiemy miarę probabilistyczną μ na prostej taką, że $\int x^n d\mu(x) = \tau(X^n)$, $n \in \mathbb{N}$ (ignoruję tu oczywiście zagadnienie istnienia i jednoznaczności tej miary). Liczby $\tau(X^n)$ nazywamy momentami zmiennej X. W teorii wolnego prawdopobieństwa, wywodzącej się od Dana Voiculescu, kluczową rolę odgrywa pojęcie *wolnych* zmiennych losowych: wolność można rozumieć jako konkretny kombinatoryczny warunek determinujący momenty (a więc i rozkład) zmiennej $X+Y$ na podstawie rozkładów zmiennych X i Y. Jeśli zmienne X i Y są wolne, to rozkład $X+Y$ nazywamy *wolnym splotem* rozkładów zmiennych X i Y. Pojęcie wolnego splotu prowadzi w naturalny sposób do definicji wolnej nieskończonej podzielności; mówimy też wię nieformalnie o 'zmiennych nieskończenie podzielnych w sensie wolnym'. Konstrukcja wolnego splotu i sama wolność w sensie Voiculescu wiąże się blisko z pojęciem *wolnych kumulant* zmiennej losowej, stanowiących wygodne odpowiedniki momentów i kodujących te same informacje o rozkładzie badanej zmiennej.

Punktem wyjścia wspomnianych badań habilitanta był wynik Arizmendiego, Hasebe i Sakumy z 2013 roku mówiący, że jeśli zmienne X, Y są wolne, a każda z nich jest nieskończenie podzielna w sensie wolnym, to nieskończenie podzielny jest też ich (samosprzężony) komutator, $i(XY - YX)$. W pracach [H1] i [H2] wynik ten został dalece uogólniony: habilitant pokazał wraz z Lehnerem, że można zrezygnować z założenia wolności zmiennych X i Y, a co więcej scharakteryzował wszystkie formy kwadratowe zachowujące wolną nieskończoną podzielność w sensie opisanym powyżej, dowodząc, że sa to dokładnie formy antysymetryczne (czyli sumy komutatorów). Podstawowym nowym pojęciem pojawiającym się w dowodzie tego wyniku jest *fenomen skracania*, polegający na tym, że rozkład zmiennej postaci $\sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$ nie zależy od nieparzystych wolnych kumulant zmiennych $X_1, \ldots, X_n$. Sama definicja wolnych kumulant wiąże się z nieprzecinającymi sie partycjami, więc fakt, że do analizy fenomenu skracania należy użyć kombinatorycznych narzędzi związanych z partycjami nie jest zaskakujący. Ciekawe jest jednak obserwowanie, jak w pracach [H1] i [H2] ewoluuje podejście do rozwiązania problemu. W pierwszej z nich, dotyczącej komutatorów, habilitant wraz z współautorem stosują zręcznie liczne znane wcześniej narzędzia (choćby wzory Krawczyk-Speichera odpowiadające klasycznym relacjom Sziriajewa-Leonowa, pojęcie R-diagonalności czy raczej ogólniej R-cykliczności, aproksymację zmiennych nieskończenie podzielnych w sensie wolnym przez wolne rozkłady Poissona), jednocześnie zauważając, że kluczem do uzyskania głównego wyniku jest właśnie fenomen skracania. W pracy [H2] skupiają się już bezpośrednio na tym ostatnim zjawisku, konstruując pewną inwolucję na zbiorze nieparzystych nieprzecinających się partycji. I tu a posteriori łatwo zrozumieć, że chcąc wykazać, że pewne kumulanty się zerują, należy dopasować do siebie te partycje, dla ktorych odpowiednie wkłady się wzajemnie znoszą, ale jasne jest, że samo zaobserwowanie fenomenu skracania, jak i konkretna konstrukcja inwolucji wymagały głębokiego zrozumienia problemu i 'geometrycznej' kombinatoryki partycji. Główny wynik [H2] jest elegancki i sformułowany w dużej ogólności. Autorzy wyznaczają też ogólną postać $\mathcal{C}$-transformaty rozkładu zmiennych postaci $\sum_{i,j} a_{ij} X_i X_j$ przy założeniu, że $(X_1, \ldots, X_n)$ to parzyste zmienne wolne, a następnie podają konkretny rozkład ν wyrażenia $\sum_{i,j} i(X_i X_j - X_j X_i)$, gdzie $(X_1, \ldots, X_n)$ to wolne zmienne o rozkładzie półokrągłym i stałej wariancji, nazywając ν *uogólnionym rozkładem tetilla o n stopniach swobody.*

W artykule [H3] habilitant (nadal z Lehnerem) bada zachowanie rozkładów form kwadratowych postaci omawianej powyżej w granicy n dążącego do nieskończoności – zakładając, że zmienne losowe X_i są wolne i mają identyczne rozkłady (o średniej 0 i wariancji 1), oraz że odpowiednie macierze form A_n zbiegają względem rozkładu (liczonego dla znormalizowanego śladu) do pewnej miary μ. Praca [H3] oprócz ogólnego wyniku zawiera też konstrukcję macierzy losowych zbiegających do granicznego rozkładu, a przede wszystkim staranną analizę sytuacji, w której badane wyrażenia to ważone sumy komutatorów i antykomutatorów (z ustalonymi wagami). Graniczny rozkład, określany przez autorów mianem wolnego uogólnionego rozkładu tangensa, ma R-transformatę postaci $R(z) = \frac{\mathrm{tg}(bz)}{b - a\,\mathrm{tg}(bz)}$, gdzie a i b to wspomniane wagi. Habilitant bada dokładniej szczególne przypadki (np. sytuację $a = 0$, $b = 1$), a także przy pomocy metod analitycznych wyznacza między innymi promień spektralny wolnego uogólnionego rozkładu tangensa. Na koniec omawiania tej części osiągnięcia habilitanta warto wspomnieć, że początkową motywacją do rozważania form kwadratowych była wolna wersja klasycznego pytania o charakteryzację zmiennych o wariancji próbkowej mającej rozkład χ^2, będąca naturalną kontynuacją badań prowadzonych przez dr Ejsmonta podczas doktoratu.

Artykuły [H4]-[H6] mają nieco odmienny charakter. Choć nadal wykorzystują narzędzia wolnej probabilistyki, główny nacisk kładzie się w nich na konstrukcję i badanie nieprzemiennych zmiennych losowych nie tyle wolnych, co spełniających relacje komutacyjne inspirowane grupami hiperoktahedralnymi, uogólniające q-relacje komutacyjne Bożejki-Kümmerera-Speichera. Punktem wyjścia jest tu przestrzeń Hilberta H wyposażona w samosprzężoną inwolucję oraz dwa parametry $\alpha, q \in [-1, 1]$. W pracy [H4] habilitant wraz z Bożejką i Hasebe konstruuje przy pomocy tych danych zdeformowaną przestrzeń Focka $\mathcal{F}_{\alpha,q}(H)$ wraz z naturalnymi operatorami kreacji i anihilacji. Następnie oblicza normy tych operatorów i przechodzi do badania rozkładu odpowiednich operatorów Gaussowskich (czyli sum operatorów anihilacji i kreacji), określanych jako *zmienne Gaussowskie typu B*; właśnie tu kluczową rolę zaczyna znów odgrywać analiza partycji. Co ciekawe, w ogólnym przypadku $\alpha \neq 0$ naturalny stan próżniowy na algebrze von Neumanna generowanej przez operatory Gaussowskie nie jest śladowy, co prowadzi do naturalnych pytań o strukturę wspomnianej algebry.

W samodzielnym artykule [H6] obliczenia momentów operatorów Gaussowskich są rozszerzone na przypadek nieprzemiennych zmiennych na $\mathcal{F}_{\alpha,q}(H)$ będących kombinacjami operatorów kreacji, anihilacji i *cechowania*, gdzie te ostatnie są po prostu odpowiednio wyrażonymi "drugimi kwantyzacjami" samosprzężonych operatorów $T \in B(H)$. Habilitant wyraża momenty takich zmiennych przy pomocy pewnej klasy kolorowanych partycji, inspirowanej technikami Anshelewicha, a następnie analizuje ich szczególne przypadki, prowadzące do zmiennych (q, α)-Poissonowskich (dla $T = I$). W całej pracy widać analogie z nieprzemiennymi realizacjami klasycznych procesów Lévy'ego wywodzącymi się z teorii kwantowych procesów stochastycznych Hudsona i Parthasarathy'ego; autor zauważa też, że jego metody dają się zastosować, po pewnych drobnych modyfikacjach, do badania modelu (q, t)-deformacji wprowadzonego przez Blitvic.

Wreszcie artykuł [H5], napisany przez habilitanta wspólnie z Blitvic, pokazuje jak rozkłady zmiennych Gaussowskich typu B pojawiają się w kontekście centralnego twierdzenia granicznego dla ciągów dwuskładnikowych sum nieprzemiennych zmiennych spełniających mieszankę relacji komutacyjnych i antykomutacyjnych, oraz podaje przykłady ciągów par macierzy spełniających założenia głównego rezultatu. Dowód jest tym razem stosunkowo prosty, dzięki wykorzystaniu dużo trudniejszej analizy kombinatorycznej przeprowadzonej wcześniej w artykule [H6].

Struktura autoreferatu jest zasadniczo jasna i czytelna, choć zdarzają się w nim drobne usterki, a niektóre pojęcia są opisane na tyle skrótowo, że w praktyce ich zrozumienie wymaga sięgnięcia do oryginalnych artykułów (dotyczy to na przykład skonstruowanej w [H2] inwolucji). Prace składające się na osiągnięcie są napisane przejrzyście – ponieważ rozważane zagadnienia są z natury techniczne, z konieczności wiele informacji wstępnych (definicje kumulant, podstawowe operacje związane z partycjami) powtarza się we wstępach do kolejnych prac. W przypadku prac [H4]-[H6] brakuje do pewnego stopnia głębszego uzasadnienia wprowadzanych deformacji. Naturalnie byłoby na przykład spytać, dlaczego rozważać akurat grupy hiperoktahedralne (a nie na przykład ogólniejsze iloczyny półproste typu $\mathbb{Z}_m \rtimes S_n$) albo czym różnią się na głębszym poziomie otrzymywane przy ich pomocy struktury – być może na przykład podając jakieś własności algebr von Neumanna generowanych przez zmienne Gaussowskie typu B. Nie zmienia to ogólnej pozytywnej oceny stylu przedstawiania uzyskanych wyników.

Pozostały dorobek i aktywność naukową dr Ejsmonta oceniam jako satysfakcjonujące. Oprócz prac zawartych w osiągnięciu habilitacyjnym jest on również autorem bądź współautorem dwunastu innych opublikowanych artykułów. Większość z nich dotyczy wolnego prawdopodobieństwa i jego wariantów, często skupiają się na rozmaitych charakteryzacjach klasycznych bądź nieprzemiennych rozkładów probabilistycznych. Wszystkie są pośrednio bądź bezpośrednio związane z tematyką rozprawy habilitacyjnej. Rozprawa doktorska habilitanta, obroniona na Uniwersytecie Wrocławskim w 2013 roku, dotyczyła w dużej części charakteryzacji wolnych rozkładów Meissnera.

Habilitant w ciągu ostatnich lat publikuje regularnie i w większości w dobrych i bardzo dobrych czasopismach. Odbył roczny staż w Grazu, co miało niewątpliwie korzystny wpływ na jego rozwój naukowy i zaowocowało twórczą współpracą z Franzem Lehnerem. Przez dwa lata pracował jako postdok na UAM w Poznaniu. Odbył też kilka krótszych wizyt w ośrodkach, w których pracują czołowi na świecie specjaliści od wolnego prawdopodobieństwa oraz wygłosił kilkanaście wykładów na konferencjach krajowych i zagranicznych. Z tego punktu widzenia przebieg jego kariery zawodowej można uznać za modelowy. Prowadził liczne i urozmaicone zajęcia dydaktyczne, kierował grantem (podoktorskim) Narodowego Centrum Nauki, współorganizował konferencję naukową oraz recenzował prace naukowe. Biorąc pod uwagę etap kariery habilitanta, jego liczba cytowań (58 cytowań według bazy MathSciNet w dniu pisania recenzji) jest w pełni satysfakcjonująca. Kryterium współpracy międzynarodowej wypełnia już choćby wspomniany wyżej staż u Lehnera, ale także prace napisane wspólnie z Hasebe i Blitvic.

KONKLUZJA

Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe fakty, uważam że **osiągnięcie habilitacyjne dr Wiktora Ejsmonta oraz jego pozostały dorobek oraz aktywność naukowa spełniają wszystkie ustawowe wymogi stawiane kandydatom do habilitacji i rekomenduję nadanie dr Ejsmontowi stopnia doktora habilitowanego**.

Adam Skalski

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Warszawa, 28 marca 2021 roku

Adam Skalski