Wrocław, 19 kwietnia 2021

Prof. dr hab. Krzysztof Bogdan
Wydział Matematyki Politechniki Wrocławskiej
krzysztof.bogdan@pwr.edu.pl
tel. 691915166

Prof. dr hab. Grzegorz Karch
Przewodniczący Rady Dyscypliny Naukowej Matematyka
Uniwersytetu Wrocławskiego
pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław
c.o. Sz. P. Małgorzata Pielużek
Dziekanat Wydz. Matematyki i Informatyki UWr
ul. Joliot-Curie 15 50-383 Wrocław

Recenzja osiągnięć naukowych w postępowaniu o nadanie stopnia naukowego doktora habilitowanego dr. Marcinowi Preisnerowi

1 Opis osiągnięć naukowych

Osiągnięcia naukowe–rozprawę habilitacyjną stanowi cykl prac, złożony z jednej samodzielnej i pięciu współautorskich publikacji [H1]-[H6] powiązanych tematycznie (oznaczenia jak w Autoreferacie).

Wspólnym mianownikiem wszystkich prac są półgrupy operatorów liniowych dane przez nieujemne (na ogół symetryczne) jądra całkowe $P_t(x,y)$ oraz związane z nimi przestrzenie Hardy'ego:

$$H^1 := \{f \in L^1 : \sup_{t>0} |P_t f| \in L^1\}.$$

Ważnym celem każdej z prac jest rozkład atomowy funkcji $f \in H^1$:

$$f = \sum \lambda_n a_n,$$

gdzie a_n są tzw. atomami w H^1 i $\sum |\lambda_n| < \infty$. Przez konkretne wymagania dotyczące własności atomów (np. wymagania dotyczące ich nośnika i supremum lub zerowej całki, czyli "skreśleń") powstaje szerokie pole badań realizowanych w pracach [H1]-[H6]. Związki tematyczne wszystkich prac nie budzą wątpliwości. Poniżej przedstawione są wybrane szczegóły analizy tych osiągnięć naukowych.

1.1

[H1] J. DZIUBAŃSKI, M. PREISNER, L. RONCAL, P.R. STINGA. Hardy spaces for Fourier-Bessel expansions. J. Anal. Math., 128, p. 261-287, 2016.

Praca [H1] poświęcona jest operatorowi Bessela i odpowiednim rozkładom atomowym. Operator Bessela występuje tu z warunkiem Dirichleta na odcinku $(0, 1)$. Przekonujaca motywacja do tych badań podana jest na wstępie pracy [H1]. Przedmiotem zainteresowania są następujące operatory (notacja w [H1] jest nieco inna niż w Autoreferacie i w poniższej dyskusji):

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\alpha}{x}\frac{d}{dx}$$

na $L^2((0, 1), x^\alpha dx)$ oraz

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{4x^2}$$

na $L^2((0, 1), dx)$. (W Autoreferacie znak drugiego składnika jest podany niepoprawnie: wzór (4.20) daje eksplozywną półgrupę Feynmana-Kaca dla dużych α.) Tutaj $\alpha > -1$, a począwszy od rozdziału 1.1 pracy [H1], $\alpha > 0$. Związek między tymi operatorami jest następujący:

$$\mathcal{L} = x^{-\alpha/2} \circ L \circ x^{\alpha/2},$$

co sygnalizuje operację warunkowania w sensie Dooba przez funkcję L-harmoniczną $h(x) = x^{\alpha/2}$, $x > 0$. Operatory Bessela są jednym z podstawowych narzędzi analizy matematycznej i teorii równań różniczkowych. Dostępny jest wygodny formalizm rozwinięć ortogonalnych (Bessela) oraz wiele jawnych wzorów i oszacowań, które są zaprezentowane i wykorzystywane w pracy [H1]. Zauważmy, że rozkłady atomowe dla operatora Bessela na (całej) półprostej $(0, \infty)$ były wcześniej zbadane w pracy:

[3] J.J. Betancor, J. Dziubański, J.L. Torrea, On Hardy spaces associated with Bessel operators, J. Anal. Math. 107 (2009), 195-219.

Praca [H1] kontynuuje tematykę pracy [3]. Nowość polega na tym, że, jak wspomniano, do operatorów dodaje sie warunek Dirichleta na $(0, 1)$, co powoduje deficyt/stopniowe zanikanie masy odpowiedniej półgrupy. Zanik masy sprawia, że odpowiednia klasa H^1 wymaga mniej "kasowań", dopuszczalne są nawet funkcje nieujemne a atomami mogą być indykatory niektórych odcinków. Habilitant niekiedy nazywa takie atomy "lokalnymi". Ta nomenklatura uzasadniona jest przez zjawisko znane od pracy D. Goldberga [29], który definiuje “lokalne” klasy Hardy’ego funkcji $f \in L^1$ zadanych warunkiem

$$\sup_{0<t<1} |P_t f| \in L^1$$

(de facto, “lokalny” jest zakres czasu w tej definicji) i wskazuje, że indykatory kul o promieniu 1 są (atomami) w H^1. Warto dodać, że lokalne klasy Hardy’ego klasy z pracy Goldberga można równoważnie zdefiniowac warunkiem $\sup_{0<t<\infty} e^{-t}|P_t f| \in L^1$, co wskazuje na rolę “zaniku masy”.

Metodologia pracy [H1] polega na wykorzystaniu/zaadaptowaniu ogólnego twierdzenia Uchiyamy [52] o przestrzeniach jednorodnych. Zauważmy, że do definicji klasy Hardy’ego używa się w [H1] odpowiedniej półgrupy Poissona (generowanej przez $\sqrt{\mathcal{L}}$) – w tej teorii liczba możliwych wariantów operatorów i półgrup do zbadania jest nieograniczona.

1.2

[H2] M. PREISNER. Atomic decompositions for Hardy spaces related to Schrödinger operators. Studia Math., 239(2), p. 101-122, 2017.

Praca [H2] dotyczy półgrup i rozkładów atomowych półgrupy Feynmana-Kaca K_t^{V+W}, $t \geqslant 0$, generowanej przez $\Delta - V - W$ na $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, gdzie $V, W \geqslant 0$ są funkcjami (operatorami mnożenia), przy czym V spełnia tzw. globalny warunek Kato, a W spełnia pewne warunki “skuteczności zabijania” względem ustalonego podziału $\mathbb{R}^d$ na kostki. Należy dodać, że podstawowe atomy mają zerowe całki względem miary $\omega(x)dx$, gdzie $\omega(x) = \lim_{t\to\infty} K_t^V 1(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, jest “terminalną masą” półgrupy generowanej przez $\Delta - V$. Własności regularności (ograniczonej) funkcji ω są dodatkowym tematem rozważań w pracy [H2]. Podobnie jak w omówionym zjawisku odkrytym przez Goldberga, zanik (masy) półgrupy spowodowany przez W “zwalnia” niektóre funkcje (np. atomy związane z kostkami podziału) w klasie H^1 z obowiązku zerowej całki.

Wyniki pracy [H2] stanowią kontynuację badań i metodologii zaproponowanych w pracach:

[20] J. Dziubański and J. Zienkiewicz, Hardy spaces H^1 for Schrödinger operators with certain potentials, Studia Math. 164 (2004), no. 1, 39-53

oraz

[21] J. Dziubański and J. Zienkiewicz, Hardy spaces H^1 for Schrödinger operators with compacty supported potendals, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 184 (2005), no. 3, 315-326.

Po lekturze prac [H1] i [H2] recenzent miał wrażenie pewnego niedosytu, związane w przewagą szczegółów technicznych nad nośnymi ideami. Dodatkowo recenzent zaniepokoił się, że ta tematyka rozwija się już być może bez kontaktu z metodami probabilistycznymi, które mogłyby dawać dodatkową lub szerszą perspektywę tych badań. Przykładowo, praca

[4] D.L. Burkholder, R.F. Gundy, M.L. Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p, Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971), 137-153,

która w zasadzie zapoczątkowała tematykę, była probabilistyczna a odseparowanie badań analitycznych od probabilistycznych może skutkować skupianiem się na przykładach zamiast na zjawiskach i ideach syntetyzujących.

1.3

[H3] E. KANIA, M. PREISNER. Hardy spaces for Bessel-Schrödinger operators. Math. Nachr., 291(5¬6), p. 908-927, 2018.

W tej pracy rozważany jest operator Bessela na półprostej $(0, \infty)$ z nieujemnym lokalnie calkowalnym potencjałem:

$$-\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\alpha}{x}\frac{d}{dx} + V$$

na $L^2((0, \infty), x^\alpha dx)$. Udowodniono charakteryzację przestrzeni Hardy'ego za pomocą odpowiedniego rozkładu atomowego. Ładnym elementem pracy jest konstrukcja rozbicia półprostej $(0, \infty)$ na odcinki, które tworzą tzw. *proper section* (Proposition 4.2). Ładnym elementem jest też szczegółowa analiza przypadku $\alpha \in (0, 1)$ w dowodzie Theorem 1.3. Dla pełniejszego obrazu zauważmy także standardowe argumenty, m.in. związane z całkowaniem półgrupy na nośniku atomu, z wykorzystaniem skracań, i poza nośnikiem, z wykorzystaniem oszacowań gaussowskich, zob. dowód Theorem 2.2. Lektura pracy [H3] wskazuje na rozwój tematyki badawczej Habilitanta, chociaż praca dotyczy dość szczególnych operatorów.

1.4

[H4] J. DZIUBAŃSKI, M. PREISNER. Hardy spaces for semigroups with Gaussian bounds. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 197(3), p. 965-987, 2018.

Kolejna praca współautorska Habilitanta otwiera szersze perspektywy. W szczególności widzimy tutaj w działaniu kilka istotnych idei matematycznych, jak rola i konstrukcja odpowiedniej funkcji harmonicznej (niezmienniczej) i wnioskowanie o hölderowskiej regularności półgrupy z jej oszacowań (gaussowskich). Ładnie opisana jest transformata/warunkowanie Dooba. Bardzo ciekawe są Proposition 8 oraz dyskusja funkcji odległości motywowanej teorio-miarowo w rozdziale 5. Ogólność zaproponowanego podejścia owocuje interesującymi przykładami umieszczonymi na końcu pracy.

1.5

[H5] E. KANIA, M. PREISNER. Sharp multiplier theorem for multidimensionał Bessel operators. J. Fourier A. Appl. 25, no. 5, 2419-2446, 2019.

Kolejna omawiana praca niesie wiele treści. Poświęcona jest operatorom mnożnikowym zdefiniowanym za pomocą transformaty Hankela dla wielowymiarowych operatorów Bessela. Najważniejszym wynikiem jest tu twierdzenie mnożnikowe typu Hörmandera (Theorem A) dla L^p z optymalne wymaganym rzędem gładkości (przekraczającym połowę wymiaru Bessela). Optymalność jest uzasadniona przez analizę urojonych potęg tego operatora. Praca zwraca uwagę obszernymi i szczegółowymi obliczeniami i wyjaśnieniami. Jej wyniki będą zapewne miały dalsze zastosowania, niezależnie od teorii rozkładów atomowych. Warto zwrócić uwagę na to, że w pracy [H5] rozkłady atomowe są narzędziem dla udowodnienia ograniczoności mnożników na H^1, a nie finalnym celem rozważań. Jak wiadomo, badania operatorów mnożnikowych są motywowane zastosowaniami do równań różniczkowych cząstkowych i pośrednio motywują tematykę rozkładów atomowych. Należy też dodać, że praca rozwija i wzmacnia wyniki wcześniejszej współautorskiej pracy Habilitanta:

[19] Dziubański, M. Preisner, B. Wróbel, Multivariate Hörmander-type multiplier theorem for the Hankel transform, J. Fourier Anal. Appl. 19 (2013), no. 2, 417-437.

1.6

[H6] E. KANIA, P. PLEWA, M. PREISNER. Local atomic decompositions for multidimensional Hardy spaces. Rev. Mat. Complut., Online First, 2020.

Praca oferuje zgrabne podejście do rozkładów atomowych dla produktów półgrup w sytuacji, gdy miarą odniesienia jest miara Lebesgue'a. Zastosowania dotyczą (niezależnych sum) operatorów Bessela, Laguerre'a i Schrödingera. Autorzy operują przejrzystymi ideami a praca daje wrażenie swobody i dobrego wyważenia ogólności i szczegółowości.

2 Ocena osiągnięć naukowych

Jak wynika z przedstawionego powyżej opisu, rozprawa habilitacyjna jest bogata w ważne treści matematyczne. Na przestrzeni lat, a prace pochodzą z okresu 2016-2020, można obserwować naturalny rozwój i wzbogacanie się tematyki badań Habilitanta. Czasopisma, w których ukazały się prace, mieszczą się nieprzerwanie w wykazach (matematycznych) czasopism publikowanych przez MNiSW (obecnie każde ma 100 pkt). Prace są już cytowane. Z dość szczegółowych oświadczeń współautorskich wynika równy w przybliżeniu udział wszystkich współautorów w pracach współautorskich, a także ukierunkowująca rola Habilitanta w pracach [H3], [H5] i [H6].

W podsumowaniu stwierdzam, że przedstawione osiągnięcia naukowe stanowią znaczny wkład Habilitanta w rozwój dyscypliny matematyki.

3 Dodatkowe uwagi

Habilitant jest zatrudniony na Uniwersytecie Wrocławskim, ale był też adiunktem na Uniwersytecie Warszawskim i postdokiem na Macquarie University w Sydney, łącznie około roku. Dlatego spełnione jest wymaganie ustawowe, aby habilitant wykazał się istotną aktywnością naukową realizowaną na więcej niż jednej uczelni.

Habilitant wykazał 14 opublikowanych prac w dobrych i bardzo dobrych czasopismach. Prace są starannie napisane i dość obszerne. Są też dość dobrze cytowane: MathSciNet podaje 63 cytowania (Scopus podaje 51; 31 po usunięciu autocytowań). Taka wielkość dorobku jest spodziewana na etapie habilitacji.

Dołączony do rozprawy habilitacyjnej Autoreferat jest logicznie napisany i dobrze wprowadza do analizy harmonicznej i rozkładów atomowych, chociaż doskwiera w nim znaczna liczba drobnych usterek edytorskich, np. kalek językowych.

Habilitant był aktywny w realizacji kilku grantów, w szczególności był kierownikiem grantu typu OPUS Narodowego Centrum Nauki. Bierze aktywny udział w konferencjach naukowych, także w organizowaniu konferencji, i rozwija współpracę naukową w kraju i za granica, rozszerzając tematykę badań. Jest aktywnym recenzentem a także popularyzatorem i edukatorem. Jest też promotorem pomocniczym jednego ukończonego doktoratu i jednego doktoratu o znacznym stopniu zaawansowania.

W podsumowaniu stwierdzam, że Habilitant spełnia wszystkie wymogi ustawowe a także dotychczasowe wymagania zwyczajowe dla uzyskania stopnia doktora habilitowanego. Z pełnym przekonaniem popieram nadanie dr. Marcinowi Preisnerowi stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych, dyscyplinie matematyka.

Z wyrazami szacunku,

Signed by Krzysztof Michał Bogdan (Qualified signer certificate). Created at 2021-04-19 11:45:51 +0200